

# Planche n° 34. Déterminants

\* très facile   \*\* facile   \*\*\* difficulté moyenne   \*\*\*\* difficile  
 I : Incontournable   T : pour travailler et mémoriser le cours

**Exercice n° 1 : (\*\*)**

Montrer que 
$$\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b).$$

**Exercice n° 2 : (\*\*)**

Pour  $a, b$  et  $c$  donnés, dont les valeurs absolues sont deux à deux distinctes, factoriser 
$$\begin{vmatrix} X & a & b & c \\ a & X & c & b \\ b & c & X & a \\ c & b & a & X \end{vmatrix}.$$

**Exercice n° 3 : (\*\*\*)**

Calculer :

1)  $\det(|i-j|)_{1 \leq i, j \leq n}$  2)  $\det(\sin(a_i + a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$  ( $a_1, \dots, a_n$  étant  $n$  réels donnés) 3) 
$$\begin{vmatrix} a & 0 & \dots & \dots & b \\ 0 & a & \ddots & & b & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & b & & & a & 0 \\ b & 0 & \dots & \dots & \dots & a \end{vmatrix}$$

4) 
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
 5)  $\det(C_{n+i-1}^{j-1})_{1 \leq i, j \leq p+1}$  6) 
$$\begin{vmatrix} -X & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -X & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -X & 1 \\ a_0 & \dots & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} & -X \end{vmatrix}$$

**Exercice n° 4 : (\*\*\*\*)** (Déterminant de CAUCHY et déterminant de HILBERT)

Soit  $A = \left( \frac{1}{a_i + b_j} \right)_{1 \leq i, j \leq n}$  où  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  sont  $2n$  réels tels que toutes les sommes  $a_i + b_j$  soient non nulles. Calculer  $\det A$  (en généralisant l'idée du calcul d'un déterminant de VANDERMONDE par l'utilisation d'une fraction rationnelle) et en donner une écriture condensée dans le cas  $a_i = b_i = i$ .

**Exercice n° 5 : (\*\*\*\*)**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  où, pour tout  $i$  et tout  $j$ ,  $a_{i,j} \in \{-1, 1\}$ . Montrer que  $\det A$  est un entier divisible par  $2^{n-1}$ .

**Exercice n° 6 : (\*\*\*)**

Résoudre le système  $MX = U$  où  $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & 2 & \dots & \dots & n \\ 1 & 2^2 & \dots & \dots & n^2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 1 & 2^{n-1} & \dots & \dots & n^{n-1} \end{pmatrix}$  et  $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ .

**Exercice n° 7 : (\*\*\*)**

Soit  $(A, B) \in (M_n(\mathbb{R}))^2$  et  $C = \begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ . Montrer que  $\det(C) \geq 0$ .

**Exercice n° 8 : (\*\*)**

Soit  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  et  $B = (b_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$  avec  $b_{i,j} = (-1)^{i+j} a_{i,j}$ . Montrer que  $\det B = \det A$ .

**Exercice n° 9 : (\*\*\*)**

Déterminer les matrices  $A$ , carrées d'ordre  $n$ , telles que pour toute matrice carrée  $B$  d'ordre  $n$  on a  $\det(A+B) = \det A + \det B$ .

**Exercice n° 10 : (\*\*\*\*)** (Déterminant circulant)

Soit  $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & & a_{n-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_n & a_1 \end{pmatrix}$  et  $P = (\omega^{(k-1)(l-1)})_{1 \leq k, l \leq n}$  où  $\omega = e^{2i\pi/n}$ . Calculer  $P^2$  et  $PA$ . En déduire  $\det A$ .

**Exercice n° 11 : (\*\*\*)**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Calculer  $\det(\text{com}(A))$  en fonction de  $\det A$  puis étudier le rang de  $\text{com}(A)$  en fonction du rang de  $A$ .

**Exercice n° 12 : (\*\*\*)** (Dérivée d'un déterminant)

Soient  $a_{i,j}$  ( $(i, j)$  élément de  $[[1, n]]^2$ )  $n^2$  fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , dérivables sur  $\mathbb{R}$  et  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Calculer la dérivée de la fonction  $x \mapsto \det(A(x))$ .

**Applications.** Calculer : **1)**  $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & x+1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & x+1 \end{vmatrix}$  **2)**  $\begin{vmatrix} x+a_1 & x & \dots & x \\ x & x+a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x \\ x & \dots & \dots & x & x+a_n \end{vmatrix}$

**Exercice n° 13 : (\*\*\*)**

Calculer :

**1)**  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$  et  $\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$  **2)**  $\det((i+j-1)^2)_{1 \leq i, j \leq n}$  **3)**  $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a & b \\ b & \dots & \dots & b & a \end{vmatrix}$

**4)**  $\begin{vmatrix} a_1+x & c+x & \dots & \dots & c+x \\ b+x & a_2+x & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & a_{n-1}+x & c+x \\ b+x & \dots & \dots & b+x & a_n+x \end{vmatrix}$  **5)**  $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$   $b, c$  complexes distincts